تطبيق طريقة الفضاء لحل معادلات المياه الضحلة ثنائية البعد

اسيل ناجح عباس

إشراف الدكتورة زهرا قلج بيى

الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد

ايران ازاد الاسلامية اصفهان قسم الرياضيات التطبيقية

مقدمة

أصبح تمثيل الظواهر الفيزيائية بالاستفادة من المعادلات التفاضلية الجزئية *PDE* أمراً شائعاً، حيث أنه في الآونة الأخيرة وبسبب التطور الكبير في الحوسبة، نجد أن المعادلات التفاضلية الجزئية تغلغلت فعلياً في كل مسألة فيزيائية كانت أو هندسية. مؤخراً، ازداد التعقيد في الظواهر الفيزيائية التي تصيغها المعادلات التفاضلية الجزئية، على سبيل المثال النقل بالحمل الحراري والتذبذبات التي يتم تشتيتها ضمن حيز صغير، هذه النماذج تحوي مؤثرات مختلفة جداً رياضياً، مما يجعلها غير قابلة للتحليل نظرياً وعددياً. في مقالتنا هذه، سوف نوضح طريقة التقسيم لحل هذا النوع من المسائل وسيتم تطبيقها على واحدة من أهم معادلات البقاء ألا وهي معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد. تم تنظيم هذه المقالة على النحو التالي: في القسم الثاني تم توضيح فكرة تقسيم الفضاء بالإضافة لتعريف فصل المؤثرات في مسائل القيمة الابتدائية. في القسم الثالث سوف نتطرق لمعادلات البقاء عموماً، ومعادلة المياه الضحلة ثنائية البعد خصوصاً، سنقوم بالاستفادة من طريقة التقسيم لحلها. سننتقل في القسم الرابع إلى الحل العددي والرسم البياني. أخيراً، سننهي البحث بالخلاصة، وذلك في القسم الخامس.

٢ فكرة تقسيم الفضاء

الفكرة الأساسية في نهج تقسيم الفضاء هي كتابة مؤثر المسأله على شكل مجموع مؤثرين أو أكثر، وبهذه الطريقة نكون قد جزأنا النموذج المراد حله إلى مجموعة من المعادلات الفرعية بحيث نوفر لكل معادلة فرعية خوارزمية بسيطة وعملية لحلها. يتم بعد ذلك تشكيل الطريقة العددية الإجمالية عن طريق اختيار مخطط عددي مناسب لكل معادلة فرعية وتجميع هذه المخططات معاً بواسطة فصل المؤثرات.

بداية، يمكننا صياغة هذه الطريقة لحل مسألة كوشي على النحو التالي

$$\frac{dU}{dt} + \mathbb{A}(U) = 0, U(0) = U_0 \qquad (2.1)$$

حيث أن A في ٢.١ هو مؤثر ما غير معرف، عندئذ سيكون جواب المعادلة ٢.١ على النحو التالي

$$U(t) = e^{-t\mathbb{A}}U_0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{dU}{dt} + \mathbb{A}_j(U) = 0, U(0) = U_0, j = 1,2 \qquad (2.3)$$

سنعرف فصل المؤثرات بالشكل التالي.

تعريف: لنفرض لدينا $t_n = n\Delta t$ حيث Δt مقدار موجب و صغير بقدر كافي، عندئذ يكون لدينا:

$$U(t_{n+1}) \approx e^{-\Delta t \cdot A_2} e^{-\Delta t . A_1} U(t_n).$$

لنفرض الآن أنه يمكننا بطريقة ما كتابة المؤثر A بالشكل $A+A_1=A_2$ ، عندئذ ستتشكل لدينا مجموعة من المسائل الفرعية على النحو التالي: عندئذ تكون حلول هذه المجموعة بالصيغة التالية:

$$U_j(t) = e^{-t\mathbb{A}_j}U_0, j = 1,2 \qquad (2.4)$$

الآن للتعامل مع المؤثرات الفرعية لدينا:

$$e^{-t\mathbb{A}_1}e^{-t\mathbb{A}_2} = e^{-t(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2)} = e^{-t\mathbb{A}}$$

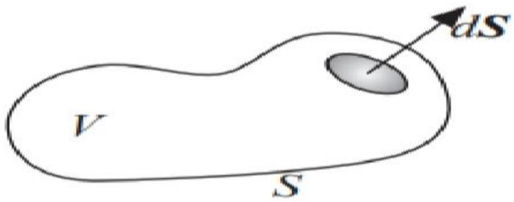
بالاستفادة مما سبق إذا أردنا الحصول على جواب المسألة نستخدم علاقة (لاي تروتيه كاتو) المعرفة بالصيغة التالية:

$$U(t) = e^{t\cdot A_1} U_0 = \lim_{\Delta t \to 0, t=n\Delta t} \left(e^{-\Delta t \cdot \mathbb{A}_2} e^{-\Delta t \cdot \mathbb{A}_1}\right)^n U_0 \qquad (2.5)$$

يتم الحصول على طريقة عددية في حال تم استبدال معاملات الحل الدقيق e^{tA_j} بتقريباتها العددية. نلاحظ أن جميع طرق التقسيم هي تحسينات لهذه الطريقة الأساسية.

معادلات قوانين البقاء ٣

تعتمد جميع نماذج الظواهر الفيزيائية تقريبا على عبارة بسيطة هي أنه لا يمكنك الحصول على شيء مقابل لا شيء، أي أن هناك بعض الخصائص الفيزيائية المهمة التي يجب الحفاظ عليها عند حل مسألة ما. لهذا السبب تم صياغة ما يسمى بمعادلات البقاء (الحفظ)، يقدم هذا القسم طريقة عامة لاستنباط معادلات الحفظ من سائر الأنواع، معادلات حفظ الكتلة، الزخم و الطاقة. لشرح الصيغة التكاملية العامة نفرض لدينا اطاراً كيفياً من القصور الذاتي في فضاء ما حجمه V يحيط به سطح ما S على سبيل المثال. كما يوضح به الشكل أدناه. حيث dS يمثل الشعاع الناظم لرقعة صغيرة من السطح S ، من المتعارف عليه أن هذا الشعاع موجه للخارج. إذا نظرنا الآن في كيفية تغيير أي كمية ϕ (بوحدات من المواد لكل وحدة حجم) داخل هذا الحجم، فإن الطريقة الوحيدة لتغيير مقدار ϕ مع الوقت هي تحريكها عبر الحدود أو إنشائها داخل الحجم. إذا فرضنا أن F هو



تدفق ϕ في حال انعدام نقل السوائل (مثل التوصيل الحراري)، عندئذ o V يمثل تدفق النقل (للمقادير وذلك لكل وحدة مساحة وكل وحدة زمنية) ويكون H مصدراً أو احاطة لـ ϕ، ثم يتم التعبير عن مصطلح الحفاظ على o لحجم V على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\int_V \Phi dV = -\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \int_S \Phi\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} + \int_V H dV$$

العاملات السالبة من التكاملات السطحية موجودة لأن التدفق الخارجي الموجب يتوافق مع معدل التغير السلبي للتكامل على الجانب الأيسر من المعادلة أعلاه. هذه المعادلة صحيحة دائما، بغض النظر عن حجم النقطة وحتى لو لم تكن الحقول متصلة؛ ومع ذلك، وبسبب التكاملات، تُفقد أي معلومات عن التركيب المكاني للحقول على مقياس أصغر من حجم السائل.

معادلات المياه الضحلة ٣.١

معادلات المياه الضحلة هي مجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية القطعية الزائدية (أو قطع مكافئ في حال تم اعتبار القص اللزج) التي تصف التدفق تحت منطقة الضغط في سائل (سطح حر بشكل عام)، و تسمى معادلات المياه الضحلة الغير موجهة بمعادلات سانت فينانت تم اقتباس هذه المعادلات عن طريق تكامل العمق في معادلات نافييه ستوكس، و ذلك في الحالة التي يكون فيها مقياس الطول الأفقي أكبر بكثير من مقياس الطول العمودي، بقاء الكتلة في ظل هذه الحالة تسبب صغراً بمقياس السرعة الرأسية للسائل مقارنة بمقياس السرعة الأفقية، يسمح التكامل الرأسي بإزالة السرعة العمودية من المعادلات. وهكذا تم اشتقاق معادلات المياه الضحلة.

معادلات المياه الضحلة ثنائية البعد

وضحنا أعلاه، فإن معادلات المياه الضحلة مشتقة من معادلة بقاء الكتلة و معادلة بقاء الزخم الخطي (نافييه ستوكس)، لذلك يتم تعريف معادلات المياه الضحلة ثنائية البعد بصيغة البقاء الخاصة بها بالشكل التالي :

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\eta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\eta v)}{\partial y}=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(\rho\eta u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\eta u^2+\frac{1}{2}\rho g\eta^2\right)+\frac{\partial(\rho\eta uv)}{\partial y}=0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial(\rho\eta v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\eta v^2+\frac{1}{2}\rho g\eta^2\right)+\frac{\partial(\rho\eta uv)}{\partial x}=0. \tag{3.3}$$

هنا لدينا n هي إجمالي ارتفاع عمود السائل (العمق اللحظي للسائل في لحظة زمنية ما و يمثل تابع لـ t,y,x) المتجه ثنائي البعد (u,u) هو سرعة التدفق الأفقية للسائل، أيضاً g يمثل التسارع الناتج عن الجاذبية و p هي كثافة السائل. كما وضحنا سابقاً، المعادلة ٣.١ مشتقة من قانون بقاء الكتلة و المعادلة ٣.٢ مشتقة من قانون بقاء الكتلة، والمعادلة ٣.٢ مشتقة من قانون بقاء الزخم.

سوف نطبق طريقة التقسيم على معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد حيث أننا اذا استطعنا كتابتها على شكل مجموعة من السائل أحادية البعد، سوف نحصل على مصفوفة معاملات مشروطة جيداً، بالإضافة إلى القدرة على استخدام عدد كبير من النقاط و النظر في المجالات غير المنتظمة. لنفرض لدينا معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(uh)}{\partial x}+\frac{\partial(vh)}{\partial y}=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t}+\frac{\partial\left(u^2h+0.5gh^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial(uvh)}{\partial y}=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t}+\frac{\partial\left(v^2h+0.5gh^2\right)}{\partial y}+\frac{\partial(uvh)}{\partial x}=0 \tag{3.6}$$

حيث أن $h=h(x,y,t)$ تمثل عمق المياه، $u=u(x,y,t)$ و $v=v(x,y,t)$ هي مكونات سرعة معدل العمق في الاتجاهات الأفقية. (تم حل هذا النموذج بعدة طرق منها طريقة جالركين)

أولاً نقوم بصياغة المعادلات من 3.4 حتى 3.6 بالشكل التالي

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y}=\mathbf{0} \tag{3.7}$$

حيث

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} h\\ uh\\ vh\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix} uh\\ u^2h+0.5gh^2\\ uvh\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix} vh\\ uvh\\ v^2h+0.5gh^2\end{bmatrix}.$$

الآن نكتب مؤثر تقسيم الفضاء بالشكل التالي:

$$\begin{cases} D_x(t): \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x}=\mathbf{0}, & \mathbf{U}(x,y,0)=\mathbf{U}_0(x,y)\\ D_y(t): \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{V})}{\partial y}=\mathbf{0}, & \mathbf{V}(x,y,0)=\mathbf{V}_0(x,y)\end{cases} \tag{3.8}$$

ونستخرج الحل التقريبي باستخدام خوارزمية تقسيم المجموعات الجزئية المرتبة، بالاستفادة من 3.8 نكتب جواباً تقريبياً بالشكل التالي:

$$\mathbf{U}(x,y,t)\approx\left[D_y(dt)\circ D_x(dt)\right]^n\mathbf{U}_0(x) \tag{3.9}$$

كما وضحنا سابقاً، فإن طريقة التقسيم تمكننا من حل معادلة ذات بعد واحد في كل خطوة، سنكتب المعادلات 3.8 على النحو التالي:

6

$$x\text{-direction}: \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (hu^2)}{\partial x} + \frac{g}{2}\frac{\partial (h^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$y\text{-direction}: \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (hv^2)}{\partial y} + \frac{g}{2}\frac{\partial (h^2)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

الآن، بالاعتماد على الطرق العددية التي تساعد في ايجاد حل تقريبي لجملة المعادلات التفاضلية و المشتقات المحلية التقريبية، على سبيل المثال الطرق التجميعية المبنية على توابع الأساس الشعاعي المحلية $(LRBF)$.
يمكن كتابة الحل التقريبي على النحو التالي:

$$\mathcal{L}f(\vec{x})|_{\mathcal{I}_i} = \left(\vec{h}^T\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{f}\Big|_{\mathcal{I}_i} = (\vec{w}_i)\,\mathbf{f},$$

حيث أن $\mathcal{I}_i$ تمثل مجموعة العقد الموجودة في التكرار i ، و B هي مصفوفة لمجموعة من الأوزان المجهولة التي يجب حسابها.
بتطبيق ما ورد أعلاه على مسألتنا، نحصل على الجواب التقريبي التالي:

$$h(x,t)|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_j h_j(t) \tag{3.12}$$

و المشتق التقريبي من المرتبة الأولى هو

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_i^x h_j(t) \tag{3.13}$$

حيث أن w_i^x هي مصفوفة معاملات الوزن لمشتق المرتبة الأولى و ذلك في اتجاه x .
بشكل مشابه يكون لدينا:

$$(uh)(x,t)|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_j (uh)_i(t), \quad \frac{\partial (uh)(x,t)}{\partial x}\Big|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_i^x (uh)_j(t). \tag{3.14}$$

$$(vh)(x,t)|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_j (vh)_i(t), \quad \frac{\partial (vh)(x,t)}{\partial x}\Big|_{\mathcal{I}_i} = \sum_{j=1}^{n_s} w_i^x (vh)_j(t). \tag{3.15}$$

نعوض المعادلات $3.12 - 3.14$ في المعادلة 3.10 يصبح لدينا:

$$\frac{dhi(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\mathcal{I}_i} w_j^x (uh)_j(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\frac{d(uh)_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\mathcal{I}_i} w_j^x \left(u^2h\right)_j(t) + \frac{g}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{I}_i} w_j^x \left(h^2\right)_j(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\frac{d(vh)_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\mathcal{I}_i} w_j^x (uvh)_j(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

أخيراً، من خلال ترتيب العقد، نحصل على جملة المعادلات التفاضلية العادية ODE بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\mathbf{h}}(t)}{dt} + \mathbf{Auh}^{\rightarrow}(t) = \mathbf{0} \\ \frac{d\vec{\mathbf{uh}}(t)}{dt} + \mathbf{A}_x\mathbf{u}^2\mathbf{h}^{\rightarrow}(t) + \frac{g}{2}\mathbf{A}_x\mathbf{h}^{2\rightarrow}(t) = 0, \\ \frac{d\vec{\mathbf{vh}}(t)}{dt} + \mathbf{A}_x\mathbf{uvh}^{\rightarrow}(t) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

هذه الجملة أعلاه تمثل نظام غير خطي من المعادلات التفاضلية العادية التي يمكن حلها بالطرق العددية المختلفة، على سبيل المثال، طريقة رانج كوتا المبنية على الفروقات الزمنية الأسية من المرتبة الرابعة (ETDRK).

٤ النتائج العددية

في هذا الفصل سوف نقوم باتباع الطريقة العددية المُقترحة بحل معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد ٣.٤ – ٣.٦.هذه الجملة أعلاه تمثل نظام غير خطي من المعادلات التفاضلية العادية التي يمكن حلها بالطرق العددية المختلفة، على سبيل المثال، طريقة رانج كوتا المبنية على الفروقات الزمنية الأسية من المرتبة الرابعة (ETDRK).

٤ النتائج العددية

في هذا الفصل سوف نقوم باتباع الطريقة العددية المُقترحة بحل معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد ٣.٤ – ٣.٦.

لنفرض لدينا معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد التالية:

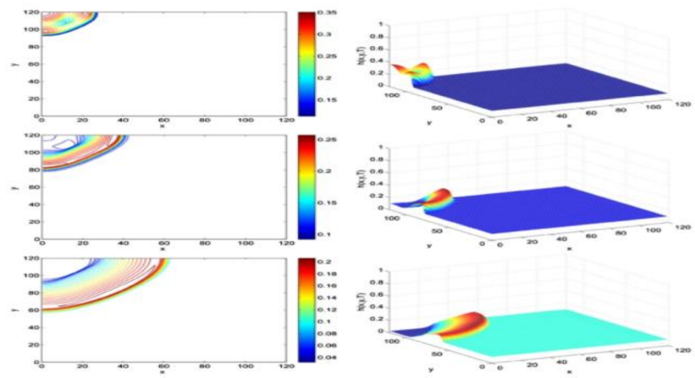
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uh)}{\partial x}+\frac{\partial (vh)}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial (uh)}{\partial t}+\frac{\partial\left(u^2h+0.5gh^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial (uvh)}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial (vh)}{\partial t}+\frac{\partial\left(v^2h+0.5gh^2\right)}{\partial y}+\frac{\partial (uvh)}{\partial x}&=0
\end{aligned}$$

مع الشروط الابتدائية التالية

$$\begin{cases} h(x,y,0)=\begin{cases}1.0, & 0\leqslant y\leqslant 10, \quad 110\leqslant x\leqslant 120\\ 0.1, & \text{o.w.}\end{cases}\\ uh(x,y,0)=0,\\ vh(x,y,0)=0,\end{cases}$$

و الشروط الحدية الانعكاسية، حيث قمنا بتطبيق التقنية المقترحة ضمن المجال المستطيلي حيث $h=\frac{1}{400}$ و $\tau=10^{-4}$ و باعتبار 301 عقدة في كل مجال جزئي في قيم مختلفة من الزمن النهائي.

حصلنا على الرسوم البيانية للحل التقريبي للعنصر u لمعادلة المياه الضحلة ثنائية البعد بالشكل التالي:



تم تنفيذ هذا المخطط من خلال برنامج $Matlab7$ على جهاز $Pentium-IV$ معالج $CPU-2800$ ميغا هرتز وذاكرة $4GB$

نعتمد النظيم التالي في حساب الخطأ:

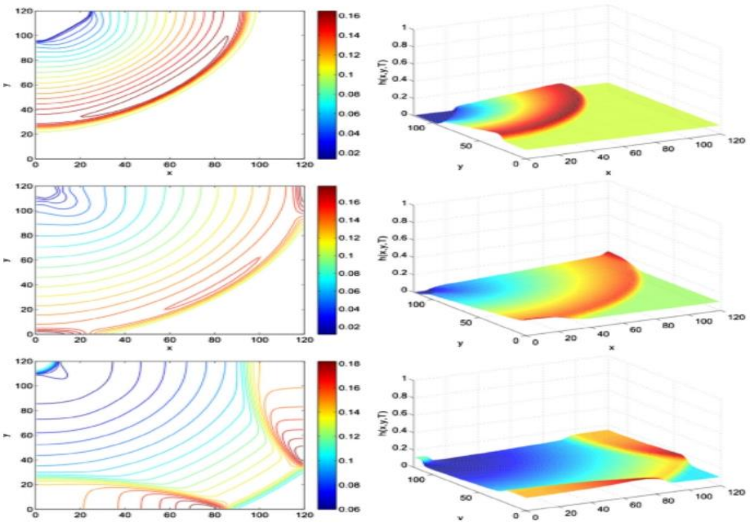
$$L_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant M-1}\left|u\left(\mathbf{x}_j,T\right)-U\left(\mathbf{x}_j,T\right)\right|$$

حيث $u\left(\mathbf{x}_j,T\right)$ تمثل الحل الدقيق للمسألة في اللحظة الزمنية T بالنسبة لتحولات معادلة المياه الضحلة المتمثلة بالعمق و مكونات السرعة، و u تمثل الحل التقريبي الناتج عن الطريقة العددية المقترحة.

نوجد الأوامر الحسابية للطريقة المعروضة في هذه المقالة بواسطة:

$$\mathrm{C-\ order} = \frac{\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

حيث E_1 و E_2 هي أخطاء تتطابق مع الخطوة المكانية بالقياس h_1 و h_2 على الترتيب.



في الشكل أعلاه أيضاً نشاهد الرسم البياني للحل التقريبي لمعادلة المياه الضحلة ثنائية البعد و طريقة تشكل و ارتداد الموجة.

الخلاصة

٥

في هذه المقالة، قمنا بشرح تقنية تقسيم الفضاء التي تساعد في حل كثير من المشكلات التي تصادفنا في مسائل الفيزياء والعلوم الهندسية، حيث أنه يوجد بعض من المعادلات التفاضلية الجزئية والتي تحتوي حلولها على انقطاع أو اهتزاز، قمنا بحل هذه المشكلات في معادلات المياه الضحلة وذلك بالاستعانة بتوابع أساس التجميع الشعاعي المحلي LRBF. لاحظنا من خلال تقنية مركبة بين تقسيم الفضاء باتباع طريقة الفصل وطريقة LRBF أنه عند حل معادلات البقاء يمكننا الأخذ بعين الاعتبار العديد من العقد في المجال الحسابي، وهذه تعد ميزة كبيرة لهذه التقنية بالإضافة لقدرتنا على حل مسائل أحادية البعد ذات حجم صغير وذلك بدلاً من مسائل ثنائية البعد ذات مصفوفة معاملات كبيرة. لإظهار كفاءة الطريقة المُقترحة، قمنا بمحاكاة معادلة المياه الضحلة ثنائية البعد التي تعد من المسائل المشهورة في قوانين البقاء وقمنا بحلها حيث أظهرت النتائج الحسابية في الفصل الرابع قدرة التقنية المُقترحة في هذا البحث.

المراجع

- L. Cozzolino, L. Cimorelli, C. Covelli, R.D. Morte, D. Pianese, The analytic solution of the shallow-water equqtion with partially open sluice-gates: the dam-break problem, Adv. Water Resour. 80 (2015) 90-120.
- G. Li, Caleffi, J. Gao, High-order well-balanced central WENO scheme for pre-balanced shallow water equations, Comput. Fluids 99 (2014) 182-189.
- M. Tavelli, M. Dumbser, A high order semi-implicit discontinuous Galerkin method for the two-dimensional shallow water equations on staggered unstructured meshes, Appl. Math. Comput. 234 (2014) 623-644.
- J. Felcman, L. Kadrnka. Adaptive finite volume approximation of the shallow water equations, Appl, Math. Comput. 219 (2012) 3354-3366.

- X. Liang, A. Q.M. Khaliq, Y. Xing, Fourth order exponential time differencing method with local discontinuous Galerkin approxima-tion for coupled nonlinear Schro dinger equations, Commun. Com-put. Phys. 17 (2015) 510-541.
- C.J. Cotter, J. Thuburn, A finite element exterior calculus frame- word for the rotating shallow water equations, J. Comput. Phys. 257 (2014) 1506-1526.
- M. Dumbser, V. Casulli, A staggered semi-implicit spectral dis- continuous Galerkin scheme for the shallow water equations, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 8057-8077.