

**تطبيقات رياضية عن دور المعادلات  
التفاضلية في تطوير التعليم  
في جائحة كورونا وما بعدها**

**د. عامر فاضل نصار**

**جامعة تكريت - كلية التربية للبنات - قسم الرياضيات**

[amer6767@tu.edu.iq](mailto:amer6767@tu.edu.iq)

**Mathematical applications about the role  
of Differential Equations in the  
development of education in the Corona  
pandemic and beyond**

**Amer Fadhel Nassar**

**Tikrit University - College of education  
for women**

**Mathematic department  
[amer6767@tu.edu.iq](mailto:amer6767@tu.edu.iq)**

This paper studies the spread of the Corona virus, which still threatens the whole world, we will prove that the spread of this virus takes place according to a system of mathematical differential equations, where we will formulate this problem mathematically, and through this mathematical formulation it is possible to know the speed of the spread of the virus and the characteristics of the process of its spread, the most prominent of which is the rapid increase in the number of infections, reaching peak areas and the speed of decreasing number of infections, as well as knowing the beginning times and characteristics of the following waves, which enables us to make the best decisions for learning and teaching, whether it is electronic or in presence, each according to its need in the stages of the spread of the virus, based on the mathematical function.

**Keywords:** Corona virus, differential equations, normal distribution function.

## المخلص

في هذا البحث سندرس إنتشار فيروس كورونا الذي لا يزال يهدد العالم كله، سنثبت ان انتشار هذا الفيروس يتم وفق نظام من المعادلات التفاضلية الرياضية، حيث سنصوغ هذه المشكلة رياضياً، ومن خلال هذه الصياغة الرياضية يمكن معرفة سرعة انتشار الفيروس وخواص عملية انتشاره والتي من ابرزها سرعة تزايد عدد الاصابات وبلوغ مناطق الذروة وسرعة تناقص عدد الاصابات، وكذلك يمكن معرفة اوقات بداية الموجات التالية وخواصها، الامر الذي يمكننا من اتخاذ القرارات الافضل للتعليم والتعلم في كونه الكتروني او حضوري كل منهما حسب الحاجة اليه في مراحل انتشار الفيروس مستنديين في ذلك الى الدالة الرياضية.

**الكلمات المفتاحية:** فيروس كورونا، معادلات تفاضلية، دالة التوزيع الطبيعي.

## (١) المقدمة

في موضوع البحث سنبدأ بتقسيم الناس إلى المجموعات التالية:

- ١- العينة (Sample) ونقصد بالعينة في موضوع البحث أنها أفراد المكان المراد دراسته، سواء كانت قارة أو دولة أو مدينة أو قرية إذ يمكن تطبيق دراستنا. [1]
- ٢- المعرضون للإصابة (Susceptibles) وسيخصص لهم الرمز  $S(t)$  وهم مجموعة الناس الذين يمكن أن ينتقل إليهم الوباء بأي شكل من الاشكال والساكنون في العينة. [1]
- ٣- المصابون بالعدوى (Infections) وسيخصص لهم الرمز  $I(t)$  وهم مجموعة الناس الذين تم تشخيص إصابتهم فعلاً بالفيروس الذي قد انتقل إليهم بإحدى طرق إنتقال الفيروس. [2]
- ٤- المتعافون (Recovered) وسيخصص لهم الرمز  $R(t)$  وهم مجموعة الناس الذين تم شفاؤهم من المرض بشكل كامل بعد أن أصيبوا به. [3]
- ٥- الأزمات (Deaths) وسيخصص لهم الرمز  $D(t)$  وهم مجموعة الناس الذين لم يتم شفاؤهم من المرض بعد أن أصيبوا به وقد فارقوا الحياة بسببه. [2]

والحرف  $t$  في موضوع البحث هو الزمن اللازم للدراسة وهو المتغير المستقل (independent variable) الذي تعتمد

عليه جميع الدوال وهي معادلات تفاضلية أعتيادية (Ordinary Differential Equations). [4]

## (٢) صياغة مشكلة الانتشار كنهودج من المعادلات التفاضلية

نفرض أن عدد أفراد العينة هو  $(N)$  نسمة. نفرض أن معدل الوفيات قريب من الصفر او يساوي صفراً  $D(t) = 0$  لكل قيم

$t$ ، لذلك يكون [5]

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (1)$$

لايوجد مصابون قبل ظهور الفيروس أي إن  $I(t) = 0$  وإن لم يوجد مصابين به فلايوجد متعافين منه أي إن  $R(t) = 0$  ولذلك فإن المعادلة (١) تأخذ الصيغة التالية

$$N = S(t) \quad (2)$$

اي إن جميع أفراد العينة هم من المعرضين للإصابة في الحالة الطبيعية وعندما يكون الزمن صفراً، أي عند النقطة التي تبدأ منها الدراسة فإنه يحتمل أن يكون هناك حالات بالإصابة، لكنها غير مسجلة لصعوبة إكتشاف الفيروس في أيامه الأولى، ولذلك سيكون عدد المصابين بالعدوى عند  $t = 0$  يأخذ الصيغة التالية [6]، [7]

$$I(0) = I_0 \quad (3)$$

وعدد المتعافين من الإصابة يكون صفراً  $R(0) = 0$  ويكون عدد المعرضين للإصابة هو

$$S(0) = S_0 \quad (4)$$

من المعادلات (1)، (3)، (4) يكون [8]

$$N = S_0 + I_0$$

في بداية ظهور الفيروس، وبالقرب من  $t = 0$  يكون عدد المصابين بالعدوى تزايدياً، لذلك يكون عدد المعرضين للإصابة تناقصياً (أي إن قيمة الدالة  $S(t)$  تكون سالبة). ولأجل كتابة نظام من المعادلات التفاضلية يعبر عن موضوع دراستنا نبدأ بالمقدار

$$\frac{ds}{dt} \quad \text{حيث يزداد هذا المقدار كلما زاد الترابط والاختلاط بين الناس، أي إنه يعتمد على كل من المقدارين } S \text{ و } I \text{ والمقدار } \frac{ds}{dt}$$

يزداد كلما زادت قيمة  $S$  ويزداد أيضاً كلما زادت قيمة  $I$  وهذا يجعل المقدار  $\frac{ds}{dt}$  يتناسب مع حاصل ضرب المقدارين ( $IS$ ) أي إن

$$\frac{ds}{dt} = -a IS \quad (5)$$

والقيمة السالبة في المعادلة (5) بسبب قيمة  $S$  المتناقصة، وقيمة  $a$  تمثل ثابت التناسب، وهي قيمة موجبة. ولإيجاد المقدار  $\frac{dI}{dt}$

فالأشخاص المصابون بالعدوى يمكن أن ينقلوها للأشخاص المعرضين للإصابة، فإذا فقدنا المقدار ( $-SI$ ) من المعرضين للإصابة فسنحصل على  $SI$  موجبة فضلاً عن الأشخاص الجدد الذين يصابون بالعدوى نتيجة تعرضهم للفيروس فيكون

$$\frac{dI}{dt} = a IS - bI \quad (6)$$

وخسارة المقدار  $bI$  من المصابين بالعدوى، فإنهم سيكونون من المتعافين أي إن [9]

$$\frac{dR}{dt} = rI \quad (7)$$

وبهذا تكون المعادلات التفاضلية الاعتيادية (5)، (6)، (7) هي نموذج من المعادلات التفاضلية المعبرة بصيغة رياضية عن مشكلة الوباء الحاصل بسبب فيروس كورونا.

### (3) مسارات دوال نموذج المعادلات التفاضلية

الأشخاص المتعافون بعد إصابتهم بفيروس كورونا معرضون للإصابة مرة أخرى ويحدث لهم ما يحصل للمعرضين للإصابة.

نفرض أن دراستنا حول عينة يبلغ عدد أفرادها ( $N$ ) نسمة ومدة الدراسة فيها هي ( $t$ ) من الايام، فإن قيمة  $\frac{dS}{dt}$  في بداية الدراسة تشمل جميع أفراد المدينة البالغ عددهم ( $N$ )، وأن الجميع معرض للإصابة وأن عدد المصابين مهما كثر ومهما حصل من أحداث فإنه سيصل إلى الصفر في يوم ما وأن المتعافين ومهما حصل من أحداث فإن عددهم سيزداد ويصل إلى ما يقارب ( $N$ ) العدد الكلي للعينة

### (4) خواص النموذج إذا كان الزمن قريباً من الصفر

نفرض أن قيمة ( $S$ ) تبقى ثابتة بالقرب من الصفر ولتكن ( $S_0$ )

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S_0 I - bI$$

$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha S_0 - b)$$

وهذه معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الاولى والرتبة الاولى، يمكن فصل متغيراتها لتأخذ الصيغة التالية

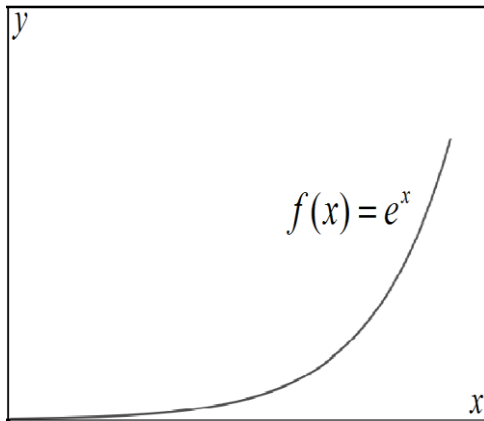
$$\frac{dI}{I} = (\alpha S_0 - b)dt$$

$$\ln I = (\alpha S_0 - b)t$$

$$I = e^{(\alpha S_0 - b)t}$$

(٨)

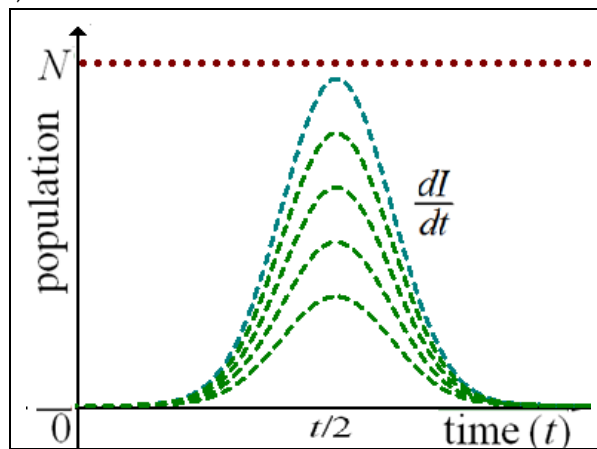
من المعادلة (٨) نستنتج أن  $I$  هي دالة أسية (Exponential function) للمتغير  $t$  وتمثل الدالة الأسية بيانياً معلوم، فهي من الدوال المعروفة رياضياً وهذا يفسر بالضبط الاحصائيات الرسمية لانتشار فيروس كورونا (أنظر الشكل (1)). [١١]، [١٢]



الشكل رقم 1 : تمثيل انتشار الفايروس وتمثيل الدالة الأسية

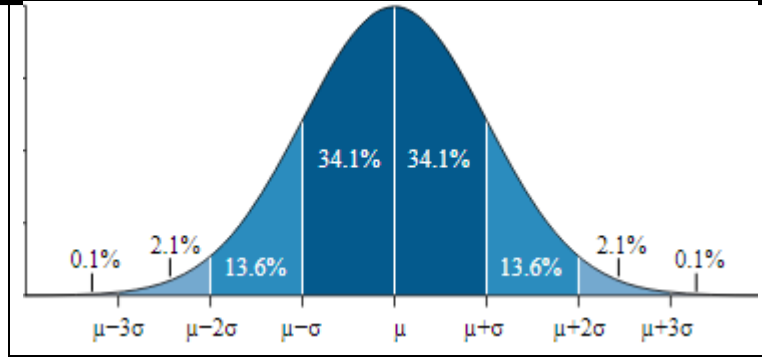
#### (٥) خواص الدالة الأسية المتوافقة مع انتشار الفايروس

لكثرة الدوال الأسية وتباينها لا بد ان نختار اي منها يتوافق مع نموذج المعادلات التفاضلية. وبما أن أي مجتمع نريد دراسته هو مجتمع محدد من الأشخاص ولو إفترضنا أن الفيروس سيصيبهم كلهم وهذا هو أسوأ إحتمال، وستكون هذه النقطة هي أعلى نقطة لدالة إنتشار الفيروس، وبعد هذه النقطة ستتناقص حتما قيم الدالة إلى أن تصل إلى الصفر، مهما كان الفيروس فتاكاً، أي إن دالة إنتشار الفيروس هي الدالة الأسية للتوزيع الطبيعي (Normal Distribution) [١٣] الذي يأخذ أشكالاً عدة من حيث إرتفاعه أو إنخفاضه والتي تدل على نسبة الاصابة بالفيروس للعينة، وذلك حسب العوامل المؤثرة على إنتشار الفيروس، (أنظر الشكل (2)). [١]، [٣]



الشكل رقم (2): إحتتمالات دوال الاصابة

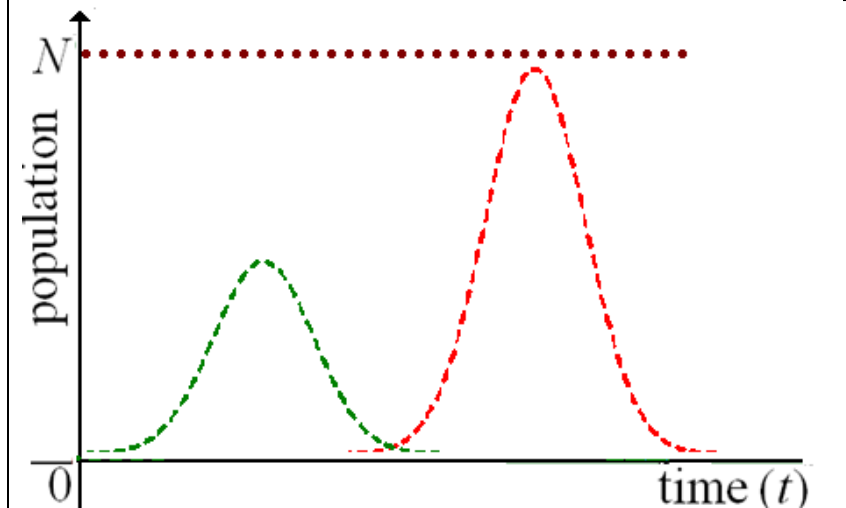
ومن خواص الدالة الأسية للتوزيع الطبيعي امتلاكه المعلمة  $\mu$  وتمثل القيمة المتوقعة للحالة الوسط (مكان الذروة) ومعلمة التباين  $\sigma^2$  قياس عرض التوزيع وهذه المعلمات لها دور كبير في تحديد نسب الاصابة بالفايروس (أنظر الشكل (3)).



الشكل رقم (3): توزيع نسب المصابين

### (٦) خواص دالة التوزيع الطبيعي وتطبيقاتها في التعليم

- لأجل الإفادة من خواص دالة التوزيع الطبيعي الرياضية، وتوظيف هذه الخواص في موضوع بحثنا فمن خواص هذه الدالة
- ١- أن قيمها صغيرة جداً (قريبة من الصفر) عندما تكون قيمة  $t$  تساوي صفراً، وهي النقطة التي يكون عندها الحل الامثل، ويتم هذا الحل بالحجر الصحي العينة المراد دراستها عن محيطها الخارجي، وترك الحياة في الداخل تسير على طبيعتها، بشرط أن لا تدخل إي إصابة جديدة على العينة لتلافي الخسائر الهائلة التي أصيب بها العالم، وفي هذه المرحلة يكون التعليم الالكتروني بمثابة عزل تام لعينات الطلبة وان كان هذا الاجراء يتعارض مع مصلحة الدولة فيمكن ان يكون التعليم حضوري مع زيادة الاجراءات التي تحد من انتشار الفيروس.
  - ٢- وعندما تكون قيم  $t$  قريبة من الصفر فإن قيم دالة التوزيع الطبيعي تكون صغيرة نسبياً، ويلاحظ هذا في الثلث الاول من الفترة  $(0, t/2)$  أي إن عدد الاصابات سيكون قليلاً والتزايد في الاعداد أيضاً قليل والحل في هذه الفترة الزمنية يعد قريباً من الحل الامثل، وقد يكون مقبولاً ويتم هذا الحل بالحجر الصحي، إلا إنه تترتب عليه أضرار إقتصادية وقد تتساوى فرص التعليم الالكتروني والحضوري.
  - ٣- وفي الثلثين الثاني والثالث من الفترة  $(0, t/2)$  تكون قيم دالة التوزيع الطبيعي متزايدة بشكل كبير جداً، مما يؤدي إلى ارتفاع كبير في قيم الدالة أي إن نسبة الزيادة في عدد الاصابات بالفيروس ستكون عالية جداً، مما يؤدي إلى زيادة كبيرة في أعداد المصابين، وقد تصبح الامور خارج السيطرة لذلك التعليم الالكتروني اقرب الى الواقع لاجراءات الحجر الصحي.
  - ٤- عند النقطة  $t/2$  فان المشتقة الاولى لدالة التوزيع الطبيعي تساوي صفراً، وهي نقطة نهاية عظمى أو صفرى للدالة، ولان المشتقة الثانية موجبة فانها نقطة نهاية عظمى للدالة، أي إن عدد المصابين يبلغ أعلى عدد (أنظر الشكلين (٢)، (٣)) لذلك فالتعليم الالكتروني هو الاقرب الى الواقع لاجراءات الحجر الصحي.
  - ٥- وفي الفترة  $(t/2, t)$  تكون دالة التوزيع الطبيعي متناقصة وتقترب تدريجياً من الصفر، أي إن أعداد المصابين ستقل تدريجياً إلى أن تقترب من الصفر وقد تكون صفراً، وفي هذه المرحلة يتم الاستعداد لتحويل التعليم الى حضوري.
  - ٦- اي تزايد يظهر في اقتراب الدالة من الصفر يدل على حصول موجة ثانية من انتشار الفيروس وقد تكون اشد او اخف من الموجة الاولى ورياضياً يتم التنبؤ بذلك بمطابقة البيانات مع دوال التوزيع الطبيعي التي تتفق مع هذه البيانات ويمكن الافادة من كل خطوات الموجة الاولى (انظر الشكل (٤)).



الشكل رقم (٤): موجتان من الفيروس

#### (٧) التوصيات

- ١- يمكن تحويل أية مشكلة في حياتنا العامة او انتشار اي فايروس إلى الرياضيات وتقديم حل رياضي لها.
- ٢- مجتمع الدراسة (العينة) متغير يمكن أن يكون دولة أو مدينة أو قرية أو جامعة او مجموعة طلاب او غير ذلك.
- ٣- في الدراسة توجد فرضيات عدة وتغيير أو إستبدال أي منها يولد دراسة ذات نتائج جديدة أخرى.

شكر وتقدير

انقدم بالشكر والتقدير الى السيد رئيس الجامعة العراقية المحترم والى كلية التربية للبنات فيها والى منتسبي المؤتمر الدولي العلمي الثاني كافة.

#### (٨) المصادر

- [1] K. M. A. Kabir, K. Kuga, and J. Tanimoto, "Analysis of SIR epidemic model with information spreading of awareness," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 119, pp. 118–125, 2019, doi: 10.1016/j.chaos.2018.12.017.
- [2] S. Jana, S. K. Nandi, and T. K. Kar, "Complex Dynamics of an SIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Treatment," *Acta Biotheor.*, vol. 64, no. 1, pp. 65–84, 2016, doi: 10.1007/s10441-015-9273-9.
- [3] E. Dantas, M. Tosin, and A. Cunha, "Calibration of a SEIR–SEI epidemic model to describe the Zika virus outbreak in Brazil," *Appl. Math. Comput.*, vol. 338, pp. 249–259, 2018, doi: 10.1016/j.amc.2018.06.024.
- [4] P. Di Giamberardino and D. Iacoviello, "Optimal control of SIR epidemic model with state dependent switching cost index," *Biomed. Signal Process. Control*, vol. 31, pp. 377–380, 2017, doi: 10.1016/j.bspc.2016.09.011.
- [5] Y. Takeuchi, W. Ma, and E. Beretta, "Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times," *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, vol. 42, no. 6, pp. 931–947, 2000, doi: 10.1016/S0362-546X(99)00138-8.
- [6] F. Zhang, Z. Li, and F. Zhang, "Global stability of an SIR epidemic model with constant infectious period," *Appl. Math. Comput.*, vol. 199, no. 1, pp. 285–291, 2008.
- [7] A. Das and M. Pal, "A mathematical study of an imprecise SIR epidemic model with treatment control," *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 56, no. 1–2, pp. 477–500, 2018, doi: 10.1007/s12190-017-1083-6.
- [8] H. M. Srivastava and H. Günerhan, "Analytical and approximate solutions of fractional-order susceptible-infected-recovered epidemic model of childhood disease," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 42, no. 3, pp. 935–941, 2019, doi: 10.1002/mma.5396.
- [9] C. C. McCluskey, "Complete global stability for an SIR epidemic model with delay - Distributed or discrete," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, no. 1, pp. 55–59, 2010, doi: 10.1016/j.nonrwa.2008.10.014.

- [10] A. J. Black, A. J. McKane, A. Nunes, and A. Parisi, "Stochastic fluctuations in the susceptible-infective-recovered model with distributed infectious periods," *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 80, no. 2, pp. 1–9, 2009, doi: 10.1103/PhysRevE.80.021922.
- [11] G. G. Hamedani, H. M. Yousof, M. Rasekhi, M. Alizadeh, and S. M. Najibi, "Type I General Exponential class of distributions," *Pakistan J. Stat. Oper. Res.*, vol. 14, no. 1, pp. 39–55, 2018, doi: 10.18187/pjsor.v14i1.2193.
- [12] G. Wu, "Shape properties of pulses described by double exponential function and its modified forms," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 56, no. 4, pp. 923–931, 2014, doi: 10.1109/TEMC.2013.2296573.
- [13] I. Gordon, "Exponential and normal distributions," *Support. Aust. Math. Proj.*, no. 1, pp. 1–5, 2014, doi: 10.1007/s13398-014-0173-7.2.